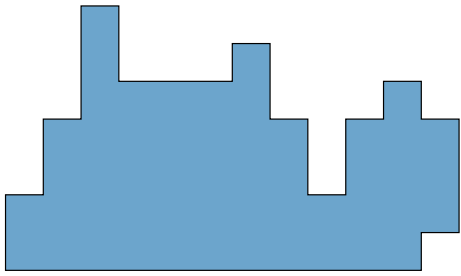


مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۱) تعدادی دستمال مستطیل شکل، روی یک میز سفید افتاده‌اند. از بالا که به این دستمال‌ها نگاه می‌کنیم، شکلی شبیه شکل سمت چپ را تشکیل می‌دهند. حداقل تعداد دستمال‌ها چندتا است؟

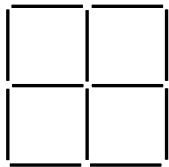
الف) ۴

ب) ۵

ج) ۶

د) ۷

ه) ۸



(۲) یک جدول 2×2 مانند شکل روبه‌رو داده شده است. این جدول با استفاده از ۱۲ چوب کبریت به‌طول واحد ساخته شده است. به چند طریق می‌توان ۲ چوب کبریت را رنگ کرد، به‌طوری که چوب کبریت‌های رنگ‌شده با هم برخورد نداشته باشند؟ دو چوب کبریت با هم برخورد دارند اگر رأس مشترک داشته باشند.

الف) ۴۸

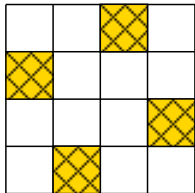
ب) ۵۰

ج) ۵۲

د) ۵۴

ه) ۶۴

(۳) شکل زیر جزیره‌ای را نشان می‌دهد که ۱۶ خانه دارد. مساحت هر خانه هم یک واحد است. ۴ تا از این خانه‌ها در شکل مشخص شده‌اند حاوی معدن طلا هستند.



یک «مزرعه»، یک مستطیل روی این جزیره است که اضلاع آن دقیقاً روی مرزهای خانه‌ها قرار دارد و مساحت آن حداقل یک واحد است. ارزش یک مزرعه برابر تعداد معادن طلای داخل آن است. برای مثال، ارزش مزرعه‌ی شامل سه ستون سمت چپ و دو سطر بالایی (به مساحت ۶) برابر ۲ و ارزش مزرعه‌ای که شامل تمام خانه‌های جدول باشد، برابر ۴ است.

مجموع ارزش‌های تمام مزرعه‌های متفاوت این جزیره کدام است؟

الف) ۱۰۴

ب) ۲۴

ج) ۲۴۰

د) ۱۲۰

ه) ۹۶

(۴) سعید و حسام بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا، سعید یک عدد طبیعی و دو رقمی n را نزد خودش انتخاب می‌کند. پس از آن و در هر مرحله، حسام یک عدد طبیعی یک رقمی مثل k به‌همراه یک بطری نوشابه به سعید می‌دهد و سعید در ازای آن، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد n (عدد خودش) بر عدد k را به حسام می‌گوید.

فرض کنید حسام به‌اندازه‌ی کافی باهوش است. او در ابتدای کار حداقل چند بطری نوشابه باید همراه داشته باشد تا مطمئن شود که با آن تعداد بطری، هم‌واره می‌تواند عدد سعید را حدس بزند؟

الف) ۲ بطری

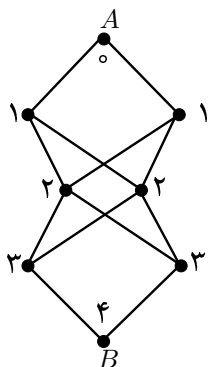
ب) ۳ بطری

ج) ۴ بطری

د) ۵ بطری

ه) ۹ بطری

مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور



(۵) در شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B رفت به طوری که هر یک از اعداد ۰ تا ۴ دقیقاً یک بار در طول مسیر در نقطه‌ها مشاهده شوند؟

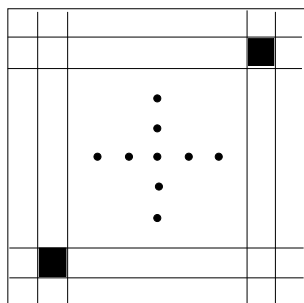
الف) ۴

ب) ۷

ج) ۸

د) ۱۵

ه) ۱۶



(۶) خانه‌های $(2, 2)$ و $(99, 99)$ یک جدول 100×100 سیاه و بقیه خانه‌های آن سفید هستند. این جدول در شکل روبرو نشان داده شده است. بعد از گذشت ۱ ثانیه تمام خانه‌های مجاور یک خانه سیاه، سیاه می‌شوند. دو خانه مجاور هستند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. بعد از چند ثانیه تمام خانه‌های جدول سیاه خواهند شد؟

الف) ۹۶

ب) ۹۷

ج) ۹۸

د) ۹۹

ه) ۱۰۰

(۷) الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

- عدد x را از ورودی بگیر.
- عدد a را برابر صفر قرار بده.
- تا زمانی که عدد x بزرگ‌تر از صفر است، کارهای زیر را انجام بده:
 - باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۲ را در k بریز.
 - اگر k برابر صفر است، به مقدار a یک واحد اضافه کن.
 - x را برابر خارج‌قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.
- مقدار a را به‌عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال، اگر به این الگوریتم عدد ۹ را بدهیم خروجی مقدار ۲ را برمی‌گرداند. اکنون فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۳۸۸ را یکی یکی به این الگوریتم می‌دهیم و هر بار خروجی الگوریتم را یادداشت می‌کنیم. بزرگ‌ترین عددی که یادداشت می‌کنیم، چند است؟

الف) ۹

ب) ۱۰

ج) ۱۱

د) ۲۰

ه) ۶۹۴

مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۸) یک جای گشت مرتبه‌ی n دنباله‌ای (ترتیبی) از اعداد 1 تا n است. برای مثال $(3, 1, 4, 2)$ یک جای گشت مرتبه‌ی 4 است. جدول ضرب یک جای گشت $P = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$ یک جدول $n \times n$ است که مقدار خانه‌ی سطر i ‌ام و ستون j ‌ام آن برابر $p_i \times p_j$ می‌باشد. برای مثال، جدول ضرب جای گشت $(3, 1, 2)$ به صورت شکل مقابل است.

| | | |
|---|---|---|
| ۹ | ۳ | ۶ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۶ | ۲ | ۴ |

آیدا و آیدین بازی زیر را انجام می‌دهند. ابتدا آیدین از اتاق بیرون می‌رود و آیدا یک جای گشت مرتبه 8 انتخاب می‌کند و جدول ضرب آن را می‌نویسد و بر روی هر کدام از 64 خانه‌ی جدول یک سکه می‌گذارد.

آیدین به اتاق برمی‌گردد و k تا از خانه‌های جدول را انتخاب می‌کند و از آیدا می‌خواهد تا سکه‌های آن k خانه را هم‌زمان از روی صفحه بردارد. بعد از انجام این کار، اگر آیدین بتواند جای گشت آیدا را دقیقاً تعیین کند، برنده می‌شود. کم‌ترین مقدار k که آیدین بتواند هم‌واره برنده بشود چند است؟

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

(۹) همان مسئله‌ی قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که اولاً، مرتبه‌ی کار به جای 8 ، برابر 3 است. ثانیاً، آیدا به جای یک جای گشت، دو جای گشت مانند $P = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ و $Q = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ را انتخاب می‌کند و عدد سطر i ‌ام و ستون j ‌ام جدول برابر $p_i \times q_j$ است. برای مثال، جدول ضرب دو جای گشت $P = \langle 1, 3, 2 \rangle$ و $Q = \langle 2, 1, 3 \rangle$ مطابق شکل مقابل است.

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۶ | ۳ | ۹ |
| ۴ | ۲ | ۶ |

آیدین در صورتی در این مسئله برنده می‌شود که بتواند هر دو جای گشت P و Q را حدس بزند. کم‌ترین مقدار k که آیدین بتواند هم‌واره برنده بشود چند است؟

- الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

(۱۰) دو چند جمله‌ای $x^{20} - x^{19} + x^{18} - \dots + x^2 - x^1 + 1$ و $x^{20} + x^{19} + x^{18} + \dots + x^2 + x^1 + 1$ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. اگر مجموع ضرایب چند جمله‌ای حاصل A باشد، باقی‌مانده‌ی A بر 5 کدام است؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۱۱) اعداد زوج را از چپ به راست پشت سر هم می‌نویسیم. 1388 ‌امین رقم این دنباله چیست؟

- الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۹

مرحله اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۲) در یک زمستان سرد، خرس قطبی ۸۸ قطعه گوشت دقیقاً به اندازه‌های ۱، ۲، تا ۸۸ را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه‌گوشت‌ها را به صورت تصادفی (و با احتمال برابر) انتخاب می‌کند. اگر اندازه‌ی گوشت عدد فردی بود، آن را کاملاً می‌خورد. اگر زوج بود، آن را دقیقاً نصف می‌کند، یک نصف آن را می‌خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می‌دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می‌میرد. با این الگوریتم، خرس ما چند روز می‌تواند زنده بماند؟

الف) ۸۵ روز ب) ۸۷ روز ج) ۸۸ روز د) ۱۷۳ روز ه) ۱۷۵ روز

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

۱۳) فرض کنید که در مربع 3×3 روبه‌رو اعداد ۱ تا ۹ را طوری قرار داده‌ایم که حاصل جمع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر شود. کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند در گوشه‌ی سمت چپ بالا قرار گیرد؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۹

۱۴) بین شهرهای یک کشور لوله‌های آب قرار داده‌ایم. میزان انتقال آب روی هر لوله هم مشخص است. «قدرت» یک شهر را برابر تفاوت میزان آب خروجی از آن شهر و میزان آب ورودی به آن تعریف می‌کنیم. قدرت یک شهر ممکن است عددی منفی یا مثبت باشد، بسته به این‌که آن شهر تولیدکننده‌ی آب باشد یا فقط مصرف‌کننده‌ی آب. مثلاً اگر قدرت یک شهر ۶- و میزان آب ورودی به آن شهر ۱۰۲ لیتر باشد میزان آب خروجی (از طریق لوله‌هایی که از آن شهر به شهرهای دیگر خارج شده است) ۹۶ لیتر خواهد بود.

در یک کشور با ۵ شهر، فرض کنید باقی مانده قدرت چهار شهر اول تقسیم بر ۱۱ به ترتیب اعداد ۱، ۷، ۹، ۳ باشد. کدام یک از اعداد زیر می‌تواند قدرت شهر پنجم باشد؟

الف) ۱۰۰۰ ب) ۳۰۰۰ ج) ۵۰۰۰ د) ۷۰۰۰ ه) ۹۰۰۰

۱۵) رولت روسی یک بازی مرگ‌بار است که طی آن هر شرکت کننده یک یا چند گلوله در هفت تیر قرار می‌دهد و بعد از چرخاندن تصادفی خشاب، لوله‌ی هفت تیر را بر روی شقیقه خود قرار داده و ماشه را می‌کشد. خشاب این هفت تیر به صورت دایره است که جای ۷ گلوله دارد و بعد از کشیدن ماشه، خشاب به صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. در یک بازی شخصی ۳ گلوله را به صورت تصادفی و با احتمال یکسان در خشاب با ظرفیت ۷ گلوله قرار می‌دهد و پس از چرخاندن خشاب، ۲ بار پیاپی شلیک می‌کند، احتمال زنده ماندنش چه قدر است؟

الف) $\frac{1}{7}$ ب) $\frac{1}{9}$ ج) $\frac{4}{7}$ د) $\frac{1}{9}$ ه) $\frac{2}{7}$

مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۶) بر روی یک عدد ۱۶ بیتی $a_8 a_7 \dots a_2 a_1$ دو عمل زیر را می‌توانیم انجام دهیم:

- شیفت: تغییر آن به $a_1 a_8 a_7 \dots a_2 a_1$
- تبدیل: تغییر آن به $a_8 a_7 \dots a_2 a_1 \bar{x}$ که \bar{x} بیت x را اگر ۰ باشد به ۱ و اگر ۱ باشد به ۰ تغییر می‌دهد.

با چند تا از این دو عمل می‌توانیم 100000010 را به 11110000 تبدیل کنیم؟

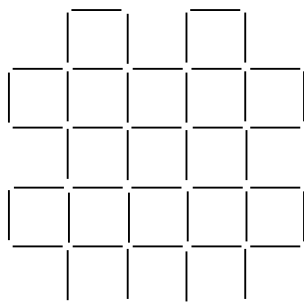
- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

(۱۷) آرایه‌ی $A[1..8]$ داده شده است. بر روی آن الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

- (۱) در ابتدا i را برابر ۱ قرار بده و به خط ۲ برو
- (۲) اگر $A[i] = i$ به خط ۴ برو و اگر $A[i] \neq i$ به خط ۳ برو
- (۳) $A[i]$ را با $A[A[i]]$ تعویض کن و به خط ۲ برو
- (۴) i را یک واحد افزایش بده و اگر i کوچک‌تر یا مساوی ۸ است به خط ۲ برو. اگر i بزرگ‌تر از ۸ است به خط ۵ برو.
- (۵) آرایه‌ی A را چاپ کن

اگر $A[1..8] = \langle 8, 5, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$ باشد، خروجی این الگوریتم چیست؟

- الف) $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ب) $\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ج) $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8 \rangle$
 د) $\langle 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$
 ه) $\langle 8, 6, 3, 4, 6, 1, 2, 7 \rangle$



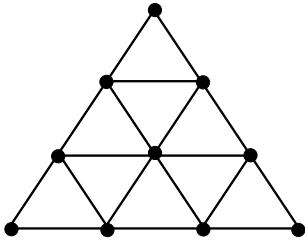
(۱۸) در شکل مقابل که با ۴۸ عدد چوب کبریت ساخته شده است، حداقل چند چوب کبریت باید برداشته شود تا هیچ مربعی دیده نشود؟

- الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۳ ه) ۱۶

مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱۹) فرض کنید آرایه‌ای به طول ۱۰۰۰ از بیت‌های ۰ و ۱ داریم. می‌گوییم این آرایه «۰-غالب» است اگر دست‌کم ۹۰٪ اعداد آن ۰ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۱ باشد). هم‌چنین آرایه «۱-غالب» است اگر دست‌کم ۹۰٪ اعداد آن ۱ باشد (و در نتیجه حداکثر ۱۰٪ آن ۰ باشد). می‌دانیم که آرایه یا ۰-غالب است یا ۱-غالب، ولی نمی‌دانیم کدام یک. چند تا از درایه‌های این آرایه را باید بررسی کنیم تا به‌طور قطع بتوانیم بگوییم که آرایه ۰-غالب است یا ۱-غالب؟

- الف) ۱۹۱ ب) ۲۰۱ ج) ۲۱۰ د) ۵۰۱ ه) ۹۰۱



(۲۰) حداکثر چند تا از نقطه‌های توپر در شکل مقابل را می‌توان با سفید رنگ کرد تا نقطه‌های سفید رئوس، یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل ندهند.

- الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

(۲۱) ۶ عدد متفاوت داده شده است. با چند تا مقایسه بین این اعداد می‌توان کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد را یافت؟ بهترین جواب را مشخص کنید.

- الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

(۲۲) افراد با شماره‌های ۱ تا ۶ به ترتیب دور میز دایره‌ای شکل و در جهت ساعت‌گرد نشسته‌اند و هریک ورقه‌ای دارند که بر روی آن یک عدد نوشته شده است (عدد فرد شماره‌ی i را $A[i]$ می‌نامیم). الگوریتم زیر را ۱۳۸۸ مرحله تکرار می‌کنیم:

(۱) هر فرد با شماره‌ی فرد ورقه‌اش را با نفر کناری‌اش (در جهت ساعت‌گرد) مقایسه می‌کند. خود عدد کوچک‌تر و نفر کناری‌اش عدد بزرگ‌تر را برمی‌دارد.

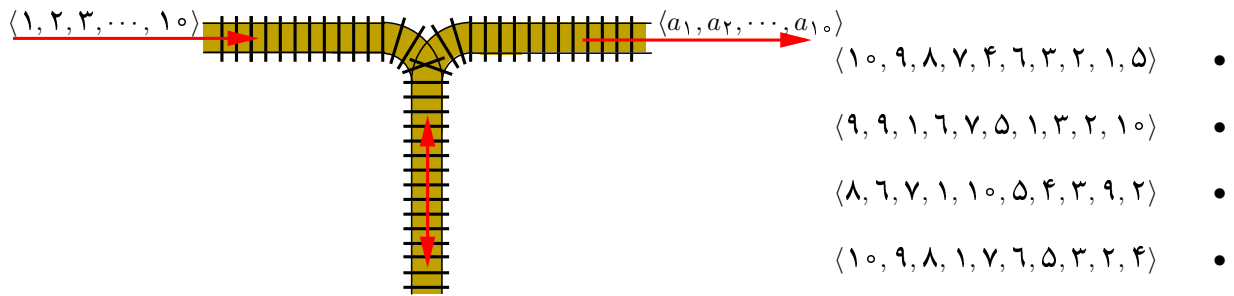
(۲) هر فرد با شماره‌ی زوج ورقه‌اش را با نفر کناری‌اش (در جهت ساعت‌گرد) مقایسه می‌کند. خود عدد کوچک‌تر و نفر کناری‌اش عدد بزرگ‌تر را برمی‌دارد.

اگر $A[۱..۶] = \langle ۲, ۴, ۵, ۶, ۸, ۹ \rangle$ باشد، بعد از اجرای ۱ مرحله $A[۱..۶] = \langle ۹, ۵, ۴, ۸, ۶, ۲ \rangle$ خواهد بود. بعد از اجرای ۱۳۸۸ مرحله ورقه‌ای که عدد ۲ روی آن نوشته شده است در دست کدام فرد خواهد بود؟

- الف) شماره‌ی ۱ ب) شماره‌ی ۲ ج) شماره‌ی ۴ د) شماره‌ی ۵ ه) شماره‌ی ۶

مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۲۳) یک ردیف از قطار با شماره‌های ۱ تا ۱۰ پشت سر هم مطابق شکل زیر قرار دارند. این ردیف با دنباله‌ی $\langle 1, 2, 3, \dots, 10 \rangle$ نمایش می‌دهیم. قطار ۱ آخرین قطار است. بین ریل ورودی و ریل خروجی ریلی به نام «پارکینگ» دقیقاً مطابق زیر قرار گرفته است. هر قطار برای آن که در ریل خروجی ظاهر شود باید ابتدا به پارکینگ وارد شود. همیشه هم آخرین قطار موجود در پارکینگ دنده عقب به خروجی منتقل می‌شود. با این ترتیب در خروجی یک دنباله از قطارها (به ترتیب از راست به چپ) ظاهر خواهد که با $\langle a_1, a_2, \dots, a_{10} \rangle$ نشان می‌دهیم و به آن دنباله‌ی «قابل تولید» می‌گوییم. دقت کنید که a_1 آخرین قطاری است که خارج می‌شود. چندتا از دنباله‌های زیر قابل تولید هستند؟



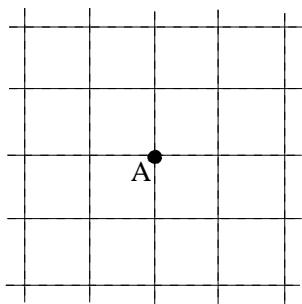
- الف) ۰
- ب) ۱
- ج) ۲
- د) ۳
- ه) ۴

(۲۴) بر روی یک جای گشت $\langle a_8 a_7 \dots a_2 a_1 \rangle$ می‌توانیم دو عمل زیر را انجام دهیم:

- عمل اول: تغییر آن به $\langle a_8 a_7 a_4 a_2 a_7 a_5 a_3 a_1 \rangle$
- عمل دوم: تغییر آن به $\langle a_8 a_4 a_7 a_3 a_7 a_2 a_5 a_1 \rangle$

فرض کنید جای گشت اولیه $\langle 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$ است. عدد i را طلایی گوییم اگر با استفاده از دو عمل بالا بتوان جای گشتی تولید کرد که $a_i = 2$ باشد. تعداد اعداد طلایی چندتا است؟

- الف) ۳
- ب) ۴
- ج) ۵
- د) ۶
- ه) ۸



(۲۵) همان‌طور که در شکل نشان داده شده است فردی در نقطه A قرار دارد. او در هر حرکت به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت راست و به احتمال ۰.۵ یک واحد به سمت چپ می‌رود. احتمال این‌که بعد از ۷ حرکت فاصله او از نقطه‌ی A بیش‌تر از ۳ باشد چه قدر است؟

- الف) $\frac{1}{16}$
- ب) $\frac{14}{128}$
- ج) $\frac{58}{128}$
- د) $\frac{1}{8}$
- ه) $\frac{57}{128}$

«موفق باشید»