- زمان آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۲ تا ۲۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ شش برادر می‌خواهند از بین خودشان یکی را برای خرید نان انتخاب کنند. آن‌ها از برادر بزرگ‌تر می‌خواهند که یک تاس بیندازد و شماره‌ی هر کسی آمد نان بخرد. اگر تاس، شماره‌ی مربوط به برادر بزرگ‌تر را نشان داد، او بهانه می‌آورد و دوباره تاس را می‌اندازد. در صورت انداختن تاس برای بار دوم، هر نتیجه‌ای که آمد اجرا می‌شود. احتمال این که برادر کوچک‌تر نان بگیرد به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۰/۱۵۰ ۲) ۰/۲۰۰ ۳) ۰/۱۳۸ ۴) ۰/۱۶۶ ۵) ۰/۱۹۴

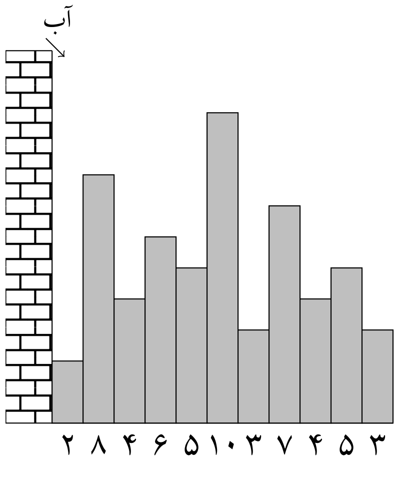
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

احتمال این که برادر کوچک‌تر نان بگیرد برابر با جمع احتمال دو حالت است:

- همان دفعه‌ی اول، برادر کوچک‌تر انتخاب شود که احتمال آن $\frac{۱}{۶}$ است.
- دفعه‌ی اول برادر بزرگ‌تر انتخاب شود، دوباره تاس بیندازند و سپس برادر کوچک‌تر انتخاب شود؛ که احتمال آن برابر $\frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}$ است.

جمع احتمال این دو حالت $\frac{۷}{۳۶} \approx ۰/۱۹۴$ است. □

۲ شهر تورقوزآباد در ارتفاع زیر سطح دریا قرار دارد و یک سد جلوی غرق شدن شهر را گرفته است. این شهر دوبعدی تعدادی ساختمان دارد که به دنبال هم و بدون فاصله هستند. از بالای سد در لحظه‌ی صفر، آب سرریز می‌شود و با سرعت یک مترمربع در دقیقه روی ساختمان اول (چپ‌ترین ساختمان) می‌ریزد. عرض همه‌ی ساختمان‌ها یک متر و ارتفاع آن‌ها (به متر) زیر هر ساختمان در شکل نوشته شده است. آخرین دقیقه‌ای که سقف ساختمان آخر خشک می‌ماند چیست؟

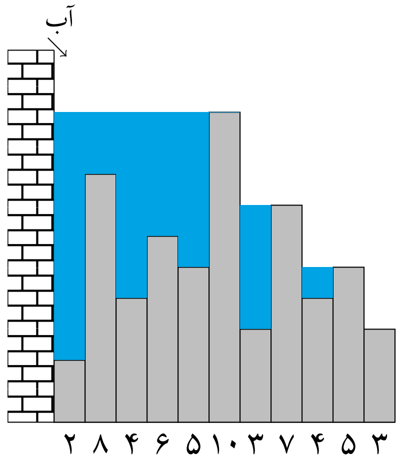


۱) ۱۴ ۲) ۳۸ ۳) ۴۶ ۴) ۳۰ ۵) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای آن که آب از بلندترین ساختمان (ساختمان با ارتفاع ۱۰) عبور کند، باید بالای تمام ساختمان‌های قبل از آن تا ارتفاع ۱۰ پر شود. پس ۲۵ واحد آب نیاز داریم تا آب از ساختمان با ارتفاع ۱۰ عبور کند. با همین استدلال ۴

واحد آب دیگر نیاز داریم تا آب از ساختمان با ارتفاع ۷ عبور کند. ۱ واحد آب دیگر نیز برای عبور از ساختمان با ارتفاع ۵ نیاز داریم. پس پاسخ برابر $۳۰ = ۱ + ۴ + ۲۵$ است.



□

۳ ایلیا رمز موبایلش را فراموش کرده است. او به یاد دارد رمزش یک عدد چهار رقمی بوده که رقم‌های صفر و پنج ندارد. همچنین او یادش هست هر دو رقم مجاور رمزش یا یکسان هستند و یا روی صفحه‌ی کلید موبایلش که در شکل پایین نشان داده شده، مجاور هم هستند. دو کلید **مجاور**ند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. ایلیا قصد دارد رمزش را با آزمون و خطا پیدا کند و سوالش این است که رمزش چند حالت ممکن دارد؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹
*	۰	#

۱) ۲۱۶   ۲) ۱۸۹   ۳) ۲۴۳   ۴) ۱۰۸   ۵) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

هر رقم مجاز دقیقاً با دو رقم مجاز دیگر مجاور است. رقم اول ۸ حالت دارد و رقم‌های بعدی هر کدام ۳ حالت (رقم قبلی و مجاورهای آن) دارند. پس جواب برابر است با

$$۸ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۱۶$$

□

۴ الگوریتم زیر را درنظر بگیرید:

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ این کار را انجام بده:

آ. به احتمال $\frac{۱}{i}$ مقدار متغیر x را برابر i قرار بده.

به چه احتمالی در انتهای الگوریتم x برابر با ۵ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵۱۲۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲۰}$ ۵) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

باید در مرحله‌ی پنجم x برابر با ۵ شود و در مرحله‌های بعدی تغییر نکند. احتمال این امر برابر است با:

$$\frac{۱}{۵}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۷}\times\cdots\times\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}.$$

$\square$

۵ در جدول نشان‌داده شده در شکل زیر، دو خانه **مجاور** هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. مهدی می‌خواهد از خانه‌ی «آ» به خانه‌ی «ب» برود. او از هر خانه می‌تواند به هر کدام از خانه‌های مجاورش برود. ناصر می‌خواهد راه او را با گذاشتن مانع در بعضی خانه‌ها ببندد. اگر در خانه‌ای مانع قرار داشته باشد، مهدی دیگر نمی‌تواند به آن خانه برود. ناصر به چند روش می‌تواند راه مهدی را ببندد؟ توجه کنید در خانه‌ی «آ» و «ب» نمی‌توان مانع قرار داد.

		ب
آ		

۱) ۴۹ ۲) ۶۹ ۳) ۱۲۷ ۴) ۷۷ ۵) ۶۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دو حالت داریم:

- در خانه‌ی وسط مانع قرار داده شود؛ در این حالت دو مسیر مجزا از «آ» به «ب» موجود است. هر کدام از این مسیرها سه خانه‌ی خالی دارد و برای مسدود کردن مسیر باید در حداقل یکی از آن‌ها مانعی قرار داده شود. این کار به $(۲^{۳}-۱)\times(۲^{۳}-۱)=۴۹$ روش قابل انجام است.
- در خانه‌ی وسط مانع قرار داده نشود؛ در این صورت از چهار خانه‌ی مشخص شده در شکل زیر، یا باید دست کم در سه خانه مانع قرار داده شود ($\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۵$ حالت) یا هر دو خانه‌ی مجاور یکی از «آ» و «ب» شامل مانع باشند (۲ حالت). مانع گذاشتن در دو خانه‌ی بالا چپ و پایین راست اختیاری است. بنابراین تعداد راه‌ها در این حالت برابر است با $(۵+۲)\times ۲^{۲}=۲۸$.

	$\star$	ب
$\star$		$\star$
آ	$\star$	

پس در مجموع تعداد روش‌ها برابر $۴۹+۲۸=۷۷$ است. $\square$

۶ ۷ لامپ در یک ردیف به صورت سری به هم وصل شده‌اند. می‌دانیم دقیقاً دو تا از لامپ‌ها خراب هستند و به همین خاطر هیچ‌کدام روشن نمی‌شوند. برای پیدا کردن لامپ‌های خراب، در هر آزمون می‌توانیم دو سر سیم برق را به دو سر یک زیربازه از لامپ‌ها (شامل یک یا چند لامپ) وصل کنیم. اگر همه‌ی لامپ‌های درون این بازه سالم باشند همه روشن می‌شوند و اگر حداقل یکی از این لامپ‌ها خراب باشد، هیچ‌کدام روشن نمی‌شوند. با حداقل چند آزمون می‌توان هر دو لامپ خراب را پیدا کرد؟

۱) ۷ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۶ ‏ ۵) ۵

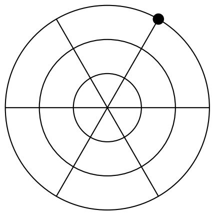
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم دست کم پنج آزمون لازم است. تعداد حالات ممکن $\binom{7}{2} = 21$ بوده و با کم‌تر از پنج آزمون حداکثر می‌توان $2^4 = 16$ حالت را از هم تمیز داد.
حال روشی با پنج آزمون ارائه می‌کنیم: در آزمون اول لامپ‌های ۱ و ۲ و در آزمون دوم لامپ‌های ۳ و ۴ را امتحان می‌کنیم. سه حالت داریم:

- در هر دو آزمون لامپ‌ها روشن شوند؛ در این حالت دو لامپ خراب در بین لامپ‌های ۵، ۶ و ۷ هستند که با آزمون لامپ ۵ و لامپ ۶ (هر کدام به تنهایی) لامپ‌های خراب پیدا می‌شود. در این حالت در مجموع پنج آزمون انجام می‌شود.
- در هر دو آزمون لامپ‌ها روشن نشدند، یک لامپ خراب در بین ۱ و ۲ و یک لامپ خراب در بین ۳ و ۴ هست. برای تعیین هر کدام از لامپ‌های یک آزمون نیاز است. در این حالت نیز در مجموع چهار آزمون انجام می‌شود.
- در یک آزمون لامپ‌ها روشن شدند و در دیگری روشن نشدند. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم لامپ ۳ و ۴ روشن شدند و لامپ ۱ و ۲ روشن نشدند. در این حالت در آزمون سوم لامپ‌های ۵ و ۶ را امتحان می‌کنیم. حال اگر
  - لامپ ۵ و ۶ روشن نشدند، یک لامپ خراب بین ۱ و ۲ و دیگری بین ۵ و۶ است که هر کدام با یک آزمون پیدا می‌شوند. در این حالت با پنج آزمون لامپ‌های خراب پیدا می‌شوند.
  - لامپ ۵ و ۶ روشن شدند، جواب بین ۱، ۲ و ۷ است. با دو آزمون (هر آزمون یک لامپ) وضعیت هر سه لامپ مشخص می‌شود. در این حالت نیز با پنج آزمون لامپ‌های خراب پیدا می‌شوند.

□

۷ **سلسایدر** (سلطان عنکبوت‌ها) لانه‌ای به شکل زیر دارد:



سستی یک نقطه از تار عنکبوت، فاصله‌ی هندسی آن از مرکز لانه تعریف می‌شود. سلسایدر ابتدا در نقطه‌ی مشخص شده (در شکل بالا) قرار دارد. او شروع به حرکت روی تارهای لانه می‌کند تا به مرکز لانه برسد. عنکبوت در طی مسیر هر نقطه‌ی لانه را حداکثر یک بار می‌بیند. هم‌چنین سستی نقاط در حین مسیر نباید در هیچ لحظه‌ای زیاد شود. چند مسیر مختلف برای سلسایدر تا رسیدن به مرکز لانه وجود دارد؟

۱) ۱۵۸۴ ‏ ۲) ۱۷۲۸ ‏ ۳) ۱۰۰۰ ‏ ۴) ۱۳۳۱ ‏ ۵) ۲۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

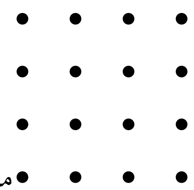
در هر یک از سه لایه‌ی موجود در تار عنکبوت، نقطه‌ای که سلسایدر از آن به لایه‌ی مرکزی‌تر می‌رود، شش حالت دارد. اگر این نقطه، خود نقطه‌ی شروع سلسایدر در لایه‌ي کنونی باشد، یک حالت برای رفتن به لایه‌ی بعدی

داریم؛ در غیر این صورت دو حالت داریم (حرکت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد تا آن نقطه). پس کل کار به $۱۳۳۱ = (۵ \times ۲ + ۱)^{۳}$ حالت قابل انجام است. □

۸ در شکل زیر هر کدام از نقطه‌ها، نشان‌دهنده‌ی یک شهر هستند. می‌خواهیم تعدادی جاده‌ی یک‌طرفه بین این شهرها احداث کنیم. جاده‌ها دو نوع هستند:

- جاده‌هایی که از یک شهر به اولین شهر سمت راستی آن کشیده می‌شوند.
- جاده‌هایی که از یک شهر به اولین شهر بالایی آن احداث می‌شوند.

به چند طریق می‌توانیم تعدادی جاده احداث کنیم، طوری که از شهر مبدأ به هر شهر دیگر دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد؟



مبدأ

۱) ۷۰ ۲) ۵۱۲ ۳) ۴۲ ۴) ۷۲۹ ۵) ۳۲۷۶۸

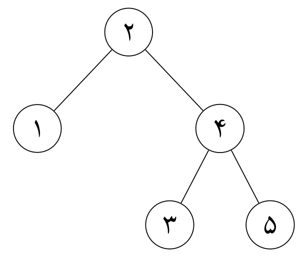
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

جاده‌های ضلع سمت چپ و پایین باید تأسیس شوند. برای ۹ شهر دیگر تعداد راه‌های جاده زدن به آن‌ها (نه از آن‌ها) را می‌شماریم. برای هر کدام دقیقاً باید یک جاده‌ی ورودی تأسیس کنیم؛ زیرا اگر صفر جاده وجود داشته باشد، از شهر مبدأ نمی‌توان به آن شهر رسید و اگر هر دو جاده وجود داشته باشد، از دو راه می‌توان از شهر مبدأ به آن شهر رسید (زیرا قرار است به هر یک از دو شهر ورودی دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد). پس پاسخ برابر $۲^{۹}$ است. □

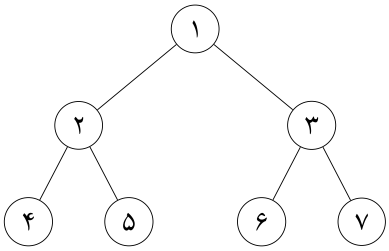
۹ **درخت جست‌وجوی دودویی** یک درخت ریشه‌دار n رأسی با ویژگی‌های زیر است:

- رأس‌ها با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند.
- هر رأس حداکثر دو فرزند دارد که یکی ریشه‌ی زیردرخت سمت چپ و دیگری، ریشه‌ی زیردرخت سمت راست است.
- به ازای هر رأس، شماره‌های تمام رأس‌های زیردرخت سمت چپ آن (در صورت وجود) از شماره‌ی خودش کوچک‌تر و شماره‌ی تمام رأس‌های زیردرخت سمت راست آن (در صورت وجود) از شماره‌ی خودش بزرگ‌تر است.

برای مثال، یک درخت جست‌وجوی دودویی در زیر کشیده‌ایم:



درخت زیر را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم یک یال در نظر گرفته و شماره‌ی دو رأس آن را جابه‌جا کنیم. کمینه‌ی تعداد مراحل لازم را بیابید، طوری که بتوانیم شکل را به یک درخت جست‌وجوی دودویی تبدیل کنیم.



۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

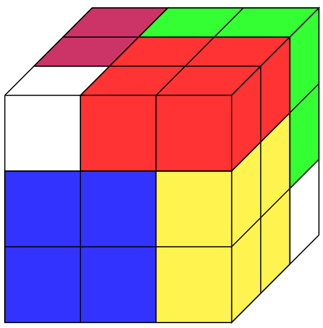
ابتدا مثالی با هفت مرحله ارائه می‌دهیم. کافی است به ترتیب جابه‌جایی‌های ۵ ↔ ۲، ۵ ↔ ۱، ۴ ↔ ۱، ۵ ↔ ۱، ۵ ↔ ۳، ۴ ↔ ۳، ۳ ↔ ۲، ۵ ↔ ۱ و ۶ ↔ ۵ را انجام دهیم.
حال ثابت می‌کنیم کار با کم‌تر از هفت مرحله قابل انجام نیست. مجموع فاصله‌ی اعداد از مکانی که باید در انتها باشند، ۱۲ یال است. پس دست کم ۶ = $\frac{۱۲}{۲}$ جابه‌جایی نیاز است. تنها در صورتی می‌توان کار را با شش مرحله انجام داد که در هر مرحله، هر دو رأس جابه‌جا شونده به مکان نهایی خود نزدیک شوند. هیچ جابه‌جایی در مرحله‌ی اول این خاصیت را ندارد. پس دست کم هفت مرحله نیاز داریم. □

۱۰ یک مکعب ۳ × ۳ × ۳ داریم. می‌خواهیم تعدادی آجر به ابعاد ۲ × ۲ × ۱ در آن بگذاریم، طوری که آجرها از مکعب بیرون نزنند. استفاده از حالات مختلف چرخش آجرها نیز مجاز است، به صورتی که اضلاع آجرها موازی اضلاع مکعب باشد. به عبارت دیگر می‌توانیم آجرها را در هر سه حالت ۲ × ۲ × ۱، ۲ × ۱ × ۲ و ۱ × ۲ × ۲ قرار دهیم. حداکثر چند آجر می‌توانیم درون مکعب جای دهیم؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

هر آجر چهار خانه و مکعب ۲۷ خانه دارد. پس نمی‌توان بیش از ۶ = $\lfloor\frac{۲۷}{۴}\rfloor$ آجر گذاشت. حال مثالی با شش آجر ارائه می‌کنیم (آجر ششم که در شکل مشخص نیست، واقع در قرینه‌ی آجر قرمز نسبت به مرکز مکعب است):



□

۱۱ یک جدول ۸ × ۲ داریم. دو خانه را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. می‌خواهیم تعدادی مهمان دعوت کنیم تا در خانه‌های جدول قرار گیرند. خبردار شده‌ایم ممکن است میان مهمان‌ها دزد یا دزدهایی موجود

باشند؛ به همین دلیل می‌خواهیم در برخی از خانه‌ها به جای مهمان، نگهبان قرار دهیم. اگر دزدی مجاور دست‌کم یکی از نگهبانان باشد، شناسایی خواهد شد. حداقل چند خانه را باید با نگهبان پر کنیم تا در هر حالتی وجود یا عدم وجود دزد در جدول تشخیص داده شود؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ابتدا مثالی با پنج نگهبان ارائه می‌کنیم:

		●				●	
●				●			●

حال ثابت می‌کنیم کار با کم‌تر از پنج نگهبان قابل انجام نیست. هر نگهبان حداکثر چهار خانه را (شامل خانه‌ی خودش) پوشش می‌دهد. پس دست کم به $۴ = \lceil \frac{۱۶}{۴} \rceil$ نگهبان نیاز داریم. از طرفی اگر بخواهیم دقیقاً چهار نگهبان استفاده کنیم، هیچ کدام نباید در خانه‌های گوشه قرار گیرند (زیرا سه خانه را پوشش خواهند داد). پس برای پوشش دو خانه‌ی گوشه‌ی سمت چپ، باید در هر دو خانه‌ی ستون دوم (از سمت چپ) نگهبان قرار داده شود. خانه‌های پوششی این دو نگهبان روی هم شش تاست. پس برای پوشش بقیه‌ی جدول دست کم $۳ = \lceil \frac{۱۶-۶}{۴} \rceil$ نگهبان نیاز است. پس در کل دست کم به پنج نگهبان نیاز داریم. □

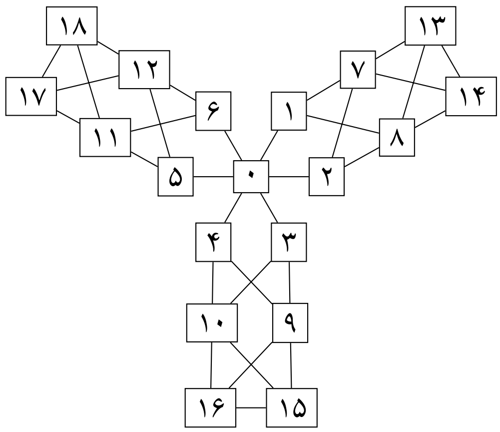
شما می‌خواهید از موزه‌ی لوور بازدید کنید. با توجه به پیچیدگی نقشه‌ی موزه، به این صورت عمل می‌کنیم: ابتدا در سالن ورودی که با شماره‌ی صفر نشان داده شده است، نقشه و راهنمای صوتی را دریافت می‌کنیم. در هر مرحله، اگر اشیاء سالنی که در آن هستیم را قبلاً ندیده باشیم، از آن‌ها بازدید می‌کنیم. سپس

- اگر از دست‌کم یکی از سالن‌های مجاور بازدید نکرده باشیم، به سالنی که کم‌ترین شماره را دارد و آن را بازدید نکرده‌ایم می‌رویم.
- اگر از همه‌ی سالن‌های مجاور بازدید کرده باشیم، به سالنی برمی‌گردیم که برای اولین بار از آن‌جا به این سالن آمده‌ایم.

حضور در سالنی که قبلاً در آن رفته‌ایم، بازدید محسوب نمی‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ اگر نقشه‌ی موزه به شکل زیر باشد، ۱۵اُمین سالنی که بازدید می‌کنیم، کدام سالن است؟ توجه کنید سالن صفر چیزی برای بازدید کردن ندارد.

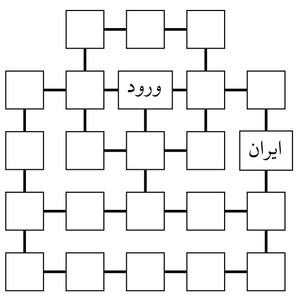


۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حذف سالن صفر، نقشه به سه مؤلفه‌ی همبندی افراز می‌شود که هر کدام ۶ سالن دارند. طبق روش گفته شده، بازدید هر مؤلفه که شروع شود، تمام سالن‌های آن بازدید می‌شود و سپس به سراغ مؤلفه‌ی بعدی می‌رویم. بنابراین ۱۵اُمین سالن، سومین سالن مؤلفه‌ی سوم است. در مؤلفه‌ی سوم به ترتیب سالن‌های ۵ و ۱۱ و ۶ بازدید می‌شوند. بنابراین جواب سالن ۶ است. □

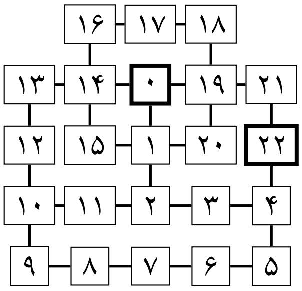
۱۳ فرض کنید نقشه‌ی موزه به شکل زیر است و ژان_ لوک رئیس موزه‌ی لوور می‌خواهد سالن‌ها را طوری شماره‌گذاری کند که شما در زمان دیرتری به سالن ایران برسید. اگر ژان_ لوک نهایت تلاش خودش را انجام دهد، شما سالن ایران را به عنوان چندمین سالن بازدید می‌کنید؟ توجه کنید سالن ورود یا همان سالن صفر چیزی برای بازدید ندارد.



۱) ۲۲ ۲) ۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۷ ۵) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر خانه‌ها را به صورت زیر شماره‌گذاری کنیم، ایران به عنوان آخرین سالن، یعنی ۲۲اُمین سالن بازدید می‌شود. ترتیب بازدید از سالن‌ها هم در شکل زیر مشابه شماره‌هایی است که در خانه‌ها قرار داده شده است.



□

لیگلی دنباله‌ای دارد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

- $L_1 = 1$
- به ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant 1$ داریم $L_{2n} = 2L_n$
- به ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant 1$ داریم $L_{2n+1} = L_{2n} - 1$

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ مقدار L_{2047} را بیابید.

۱) ۱۰۲۳ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۲۰۴۷ ۴) ۳ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

جملات ابتدای دنباله را می‌نویسیم:

$$1, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 16, \ldots$$

به راحتی با استقرا می‌توانیم ثابت کنیم جملات L_{2^k} تا $L_{2^{k+1}-1}$ به ترتیب برابر 2^k تا ۱ (به ترتیب نزولی) هستند. پس $L_{2047} = 1$ است.

□

۱۵ مجموع مقادیر L_1 تا L_{255} را بیابید.

۱) ۲۱۸۴۵ ۲) ۲۲۱۰۰ ۳) ۵۰۲ ۴) ۳۲۷۶۸ ۵) ۱۱۰۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با همان استدلال سوال قبل، باید مجموع زیر را حساب کنیم:

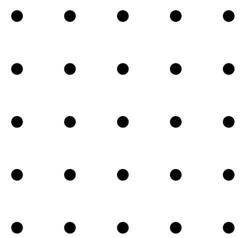
$$A = (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3 + 4) + \ldots + (1 + 2 + \ldots + 2^7)$$

محاسبات:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2^0 \times (2^0 + 1)}{2} + \frac{2^1 \times (2^1 + 1)}{2} + \ldots + \frac{2^7 \times (2^7 + 1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big((2^0 + 2^2 + \ldots + 2^{14}) + (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^7)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{2^{16} - 1}{4 - 1} + \frac{2^8 - 1}{2 - 1}\Big) \\
&= 11050
\end{aligned}$$

□

شبکه‌ی نقاط زیر را در نظر بگیرید:



یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین را **سلطانی** گوییم، اگر رأس‌های آن منطبق بر نقاط بالا بوده و اضلاع قائمه‌ی آن افقی و عمودی باشند.
در ابتدا تعدادی از نقاط بالا سبز شده‌اند. **سوگلی** در هر مرحله یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی سلطانی انتخاب می‌کند، طوری که دقیقاً دو رأس آن سبز باشند (لزومی ندارد این دو رأس، دو سر وتر باشند)؛ سپس رأس سوم را نیز سبز می‌کند. او آن قدر این کار را انجام می‌دهد تا دیگر نتوان نقطه‌ی جدیدی را سبز کرد.

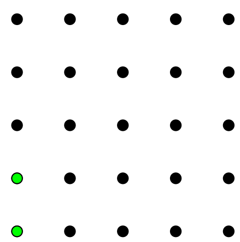
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ حداقل چند خانه در ابتدا باید سبز باشند تا این امکان وجود داشته باشد که پس از انجام مراحل، تمام نقاط به رنگ سبز در آیند؟

۱) ۲   ۲) ۹   ۳) ۳   ۴) ۵   ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

از طرفی دست کم دو نقطه لازم است؛ زیرا با فقط یک نقطه، نقطه‌ی جدیدی اضافه نمی‌شود. اگر هم دو نقطه‌ی زیر را سبز کنیم، تمام نقاط سبز خواهند شد.



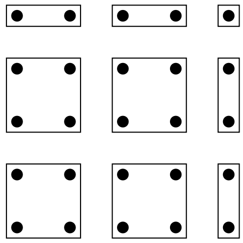
□

۱۷ حداکثر چند خانه در ابتدا می‌توانند سبز باشند، طوری که در انتها دست‌کم یک نقطه‌ی غیر سبز باقی بماند؟

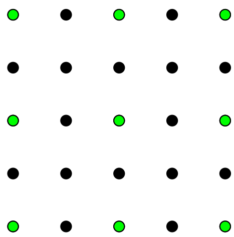
۱) ۲۰   ۲) ۴   ۳) ۹   ۴) ۵   ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم حداکثر ۹ نقطه‌ی سبز در ابتدا می‌توان داشت. نقاط را به دسته‌های زیر افراز کنید:

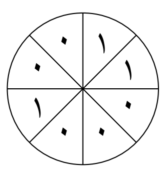


مشابه استدلال سوال قبل، اگر ابتدا از یک دسته بیش از یک نقطه‌ی سبز داشته باشیم، تمام نقاط سبز خواهند شد. پس حداکثر ۹ نقطه‌ی سبز در ابتدا می‌توان داشت.
حال مثالی برای ۹ نقطه ارائه می‌کنیم. اگر نقاط سبز ابتدایی به شکل زیر باشند، هیچ نقطه‌ی سبز جدیدی اضافه نخواهد شد.



□

ملامین (جمع **مملی!**) موجوداتی عجیب هستند. DNA هر مملی از هشت بیت (رقم ۰ یا ۱) تشکیل شده است که دور یک دایره قرار گرفته‌اند. برای مثال شکل زیر مثالی از DNA یک مملی است:



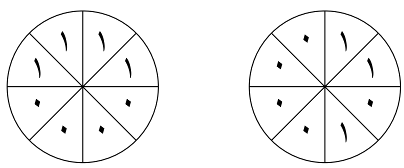
دو مملی را **همسان** گوییم، اگر بتوان DNA یکی را چرخاند تا به دیگری تبدیل شود. عمل XOR روی دو بیت را با علامت $\oplus$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$0 \oplus 0 = 0 \qquad 0 \oplus 1 = 1 \qquad 1 \oplus 0 = 1 \qquad 1 \oplus 1 = 0$$

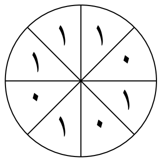
عمل تولید مثل توسط دو مملی مانند M_1 و M_2 به صورت زیر انجام می‌شود:

> مملی M_1 دایره‌ی DNAاش را به مقداری دلخواه می‌چرخاند و روی دایره‌ی DNA مملی M_2 می‌اندازد. سپس بیت‌های هر دو خانه‌ی روی هم XOR گرفته شده و در خانه‌ی متناظر مملی فرزند نوشته می‌شوند.

برای مثال دو مملی زیر را در نظر بگیرید که می‌خواهند تولید مثل کنند:



فرض کنید مملی سمت راست یک واحد در جهت ساعت‌گرد بچرخد و سپس عمل XOR و تولید مثل انجام شود. در نتیجه یک مملی با DNA زیر به وجود می‌آید:



مملی‌هایی که تولید مثل می‌کنند، از بین نرفته و زنده می‌مانند. هم‌چنین برای عمل تولید مثل بین دو مملی هیچ محدودیتی نیست؛ به عبارت دیگر هر دو مملی (حتی همسان) می‌توانند تولید مثل کنند.

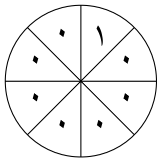
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۸ کمینه‌ی تعداد مملی‌های اولیه را بیابید، طوری که با استفاده از آن‌ها بتوانیم تعدادی مملی بسازیم که تمام DNAهای ممکن را داشته باشند.

۱) ۳ ۲) ۱۶ ۳) ۲ ۴) ۸ ۵) ۶

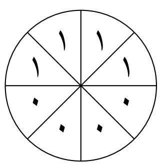
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

از طرفی دست کم دو مملی نیاز است؛ زیرا با فقط یک مملی نمی‌توان مملی دیگری ساخت. دو مملی کافی نیز هست. کافی است یک مملی با DNA زیر و یک مملی دل‌خواه دیگر داشته باشیم:

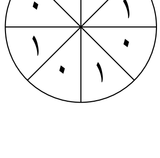


با مملی گفته شده می‌توان به دل‌خواه، هر بیت از مملی دیگر را تغییر داد. پس تمام مملی‌ها قابل تولید هستند. □

۱۹ فرض کنید در ابتدا فقط دو مملی داریم که DNA هر دو به شکل زیر است:



حداقل چند عمل تولید مثل باید انجام شود تا یک مملی با DNA زیر ساخته شود؟



۱) ۵   ۲) ۱   ۳) ۴   ۴) ۲   ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با نوشتن تمام مملی‌های قابل تولید تا مرحله‌ی n ام مشاهده می‌کنیم مملی گفته شده در حالت بهینه، در مرحله‌ی سوم ایجاد خواهد شد. □

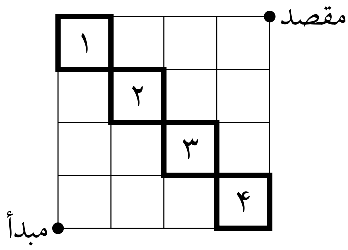
۲۰ دو خانه را **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک مملی را **خوشگل** گوییم، اگر در DNA خود هیچ دو خانه‌ی مجاور شامل بیت ۱ نداشته باشد. چند مملی خوشگل دو به دو غیر همسان وجود دارد؟

۱) ۷   ۲) ۳۴   ۳) ۲۱   ۴) ۸   ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حالت‌بندی بر روی بیشینه‌ی تعداد بیت‌های ۱ متوالی مشاهده می‌کنیم هشت حالت وجود دارد (حواستان به حالات مختلف چرخش باشد). □

در جدول ۴ × ۴ زیر، یک دزد می‌خواهد از نقطه‌ی مبدأ به نقطه‌ی مقصد برود. دزد فقط می‌تواند روی پاره‌خط‌ها و تنها در جهت‌های بالا و راست حرکت کند. سرعت حرکت دزد، ثابت و یک واحد بر ثانیه است. به غیر از دزد، روی محیط هر کدام از چهار خانه‌ای که با شماره‌های ۱ تا ۴ نشان داده شده‌اند، یک پلیس قرار دارد. پلیس هر خانه نیز با سرعت ثابت یک واحد بر ثانیه و در جهت پادساعت‌گرد روی محیط آن خانه حرکت می‌کند. اگر در یک لحظه دزد با یکی از پلیس‌ها روی یک نقطه باشد (چه در وسط پاره‌خط‌ها و چه در انتهای پاره‌خط‌ها) دست‌گیر می‌شود.



با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین راست آن باشد، دزد به چند طریق می‌تواند از مبدأ به مقصد برود؟

۱) ۰   ۲) ۱۵   ۳) ۳۵   ۴) ۱   ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

پس از سه مرحله پلیس‌ها در نقطه‌های پایین چپ خانه‌های‌شان هستند و دزد نیز باید روی یکی از خانه‌ها باشد. پس دزد قطعن دست‌گیر می‌شود و مسیری وجود ندارد. □

۲۲ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس بالا چپ آن باشد، دزد به چند طریق می‌تواند از مبدأ به مقصد برود؟

۱) ۱   ۲) ۳۵   ۳) ۰   ۴) ۱۵   ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

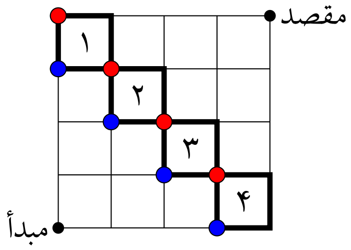
پس از چهار مرحله پلیس‌ها و دزد روی نقاط قطر اصلی خواهند بود. پلیس‌ها نقاط قطر اصلی به جز نقطه‌ی پایین‌ـ راست را پوشش خواهند داد. پس دزد باید از همان نقطه‌ی پایین‌ـ راست در برود که تنها یک مسیر برای این کار وجود دارد. □

۲۳ اگر پلیس هر خانه ابتدا در رأس پایین چپ آن باشد، دزد به چند طریق می‌تواند از مبدأ به مقصد برود؟

۱) ۳۵ ۲) ۰ ۳) ۸ ۴) ۱۵ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

پس از سه مرحله پلیس‌ها در نقاط قرمز شکل زیر و دزد در یکی از نقطه‌های آبی خواهد بود:



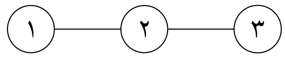
با در نظر گرفتن نقاط آبی، چهار حالت داریم:

- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه‌ی سمت آبی چپ برود؛ خود رفتن تا آن نقطه یک حالت دارد. در ادامه‌ی مسیر دزد برای این که گیر نیفتد، باید یک گام به راست برود. ادامه‌ی مسیر محدودیتی نداشته و $\binom{۴}{۱} = ۴$ حالت دارد.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه‌ی سمت آبی دوم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه $\binom{۳}{۲} = ۳$ حالت دارد. سپس دزد برای فرار از پلیس‌ها باید یک گام به راست برود. ادامه‌ی مسیر محدودیتی نداشته $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت دارد. پس در این قسمت $۱۸ = ۶ \times ۳$ مسیر داریم.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه‌ی سمت آبی سوم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه $\binom{۳}{۱} = ۳$ حالت دارد و ادامه‌ی مسیر نیز مشابه حالت اول است. پس در این قسمت $۱۲ = ۴ \times ۳$ مسیر داریم.
- دزد از بین نقاط آبی، به نقطه‌ی سمت آبی چهارم (از سمت چپ) برود؛ خود رفتن تا آن نقطه یک حالت و ادامه‌ی مسیر نیز یک حالت دارد. پس در این قسمت یک مسیر داریم.

پس پاسخ برابر با $۳۵ = ۱ + ۱۲ + ۱۸ + ۴$ است. □

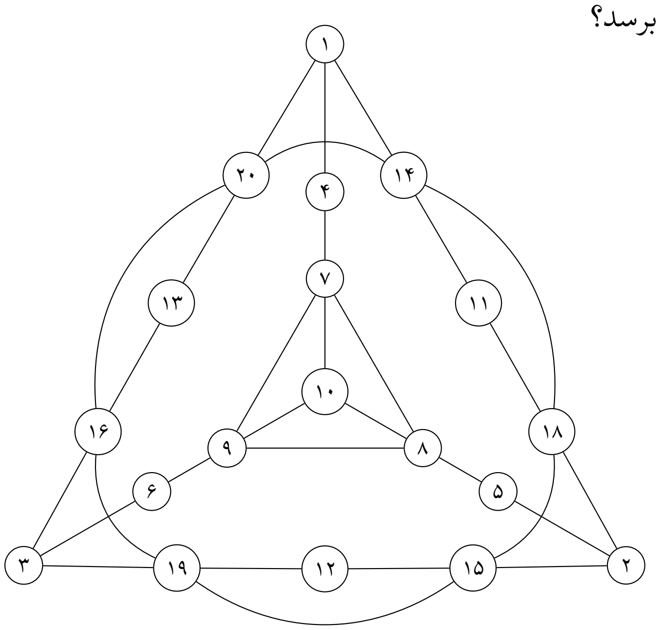
گروهی از افراد با هم قرار گذاشته‌اند که رأس هر ساعت هر کدام خبرهایی که در ساعت قبل دریافت کرده است برای همه‌ی دوستان خود بفرستند. در یک **شبکه‌ی دوستی**، هر فرد با یک دایره نشان داده می‌شوند و اگر دو نفر با هم دوست باشند، دایره‌های آن‌ها به هم وصل می‌شوند. شکل زیر یک شبکه‌ی دوستی با سه نفر را نشان می‌دهد.

در این شبکه اگر ابتدا نفر ۱ خبر جدیدی را دریافت کند، نفر ۲ پس از یک ساعت و نفر ۳ پس از دو ساعت از آن خبر مطلع می‌شود؛ در حالی که اگر نفر ۲ اولین کسی باشد که خبر را دریافت می‌کند، پس از یک ساعت همه از خبر مطلع می‌شوند.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ یک شبکه‌ی دوستی در شکل زیر آمده است. در این شبکه، یک خبر جدید را ابتدا به چه کسی بدهیم تا در کم‌ترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟

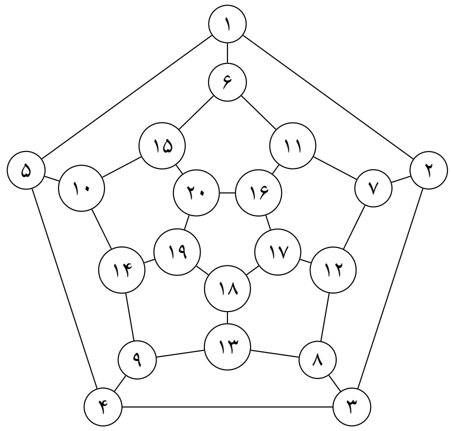


۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۷ ۴) ۲ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر به یکی از افراد گوشه خبر داده شود، در ۴ ساعت خبر منتشر می‌شود. اگر یکی از افراد ۴، ۵ و یا ۶ خبر را دریافت کند، در ۶ ساعت خبر منتشر می‌شود. اگر خبر برای اولین بار به افراد دیگر برسد، در ۵ ساعت پخش می‌شود. پس جواب می‌تواند هر کدام از افراد گوشه‌ای (۱، ۲ و یا ۳) باشد. □

۲۵ در شبکه‌ی دوستی زیر، یک خبر جدید را به کدام دو نفر بدهیم تا در کم‌ترین زمان ممکن خبر به همه برسد؟



۱) ۴ و ۱۶ ۲) ۱۷ و ۱۹ ۳) ۵ و ۱۲ ۴) ۲ و ۵ ۵) ۷ و ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

این شبکه مربوط به یک دوازده‌وجهی است و کاملاً متقارن است. اگر دو رأسی که از هم دور هستند و فاصله‌ی ۵ دارند را انتخاب کنیم، در ۲ ساعت خبر پخش می‌شود و اگر دو رأس فاصله‌ی کمتری داشته باشند جواب بیش‌تر از ۲ است. در بین گزینه‌ها فقط ۴ و ۱۶ این خاصیت را دارند. □